أكاديمية الجهة الشرقية نيابة وجدة	مـادة الـريـاضيات	الأستاذ : عثماني نجيب مذكرة رقم 8/

مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

مذكرة رقم 8 في درس الدوال الأسية

محتوى البرنامج
- **الدالة الأسية النبيرية**
  - **تعريف وخصائص جبرية**
  - **نهايات اعتيادية**
  - **مشتقة الدالة الأسية النبيرية**
  - **الدالة الأصلية للدالة الأسية النبيرية**
- **الدالة الأسية للأساس a.**
  - **تعريف وخصائص جبرية**
  - **دالة الأسية للأساس 10**
- **دراسة دوال تحتوي على الدالة الأسية النبيرية و اللوغاريتم النبيري**

القدرات المنتظرة
- **التمكن من حل معادلات و متراجحات اسية نبيرية**
- **التمكن من نهايات الدوال الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها**
- **التمكن من النهايات الأسية النبيرية الأساسية و توظيفها**
- **التمكن من دراسة و تمثيل دوال تحتوي على لوغاريتمات و دوال أسية نبيرية**
- **تحديد قيم مقربة للعدد $(a\in\mathbb{R})\,e^{a}$ أو تحديد قيم مقربة للعدد a بحيث e^{a} معلوم باستعمال الأداة المعلوماتية**

I. الدالة الأسية النبيرية

الدالة $\ln$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0;+\infty[$ و $\ln(]0;+\infty[)=\mathbb{R}$.

و منه الدالة $\ln$ تقبل دالة عكسية معرفة على $\mathbb{R}$.

1) تعريف: الدالة العكسية للدالة $\ln$ تسمى الدالة الأسية و نرمز لها بالرمز $\exp$.

ملاحظة : الكتابة : $\exp(x)$ نكتبها باختصار على الشكل : e^{x}

2) نتائج: $e^{0}=1$ و $e^{1}=e$. $(\forall x\in\mathbb{R})\,e^{x}>0$.

$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\,]0;+\infty[)\ ,\ (y=e^{x}\Leftrightarrow x=\ln y)$

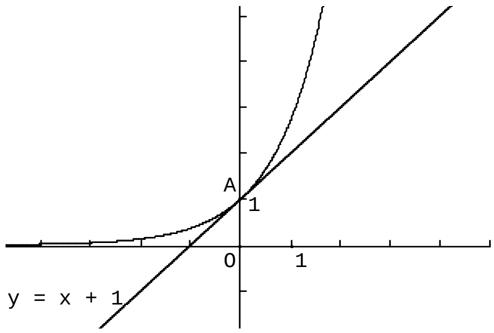
$(\forall x\in\mathbb{R});\ln(e^{x})=x$ و $(\forall x\in\,]0;+\infty[);e^{\ln x}=x$.

الدالة $\exp$ متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

$e^{x}>e^{y}\Leftrightarrow x>y$

$e^{x}=e^{y}\Leftrightarrow x=y$ لكل x و y من $\mathbb{R}$

منحنى الدالة $\exp$: في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة $\exp$ هو مماثل لمنحنى الدالة $\ln$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته : . $y=x$.



3) خاصيات:

لكل x و y من $\mathbb{R}$ و لكل r من $\mathbb{Q}$ لدينا:

- $e^{x+y}=e^{x}\times e^{y}\ ;\ e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$
- $e^{x-y}=\dfrac{e^{x}}{e^{y}}$ و $(\forall x\in\,]0;+\infty[)\ (e^{x})'=e^{x}$

تمرين1: ليكن a عددا حقيقيا, و b عددا من $\mathbb{R}^{*+}$ بسط ما يلي :

$A=e^{\ln(b)}-\ln(2e^{b})-\ln\left(\dfrac{e}{2}\right)$ و $B=\dfrac{(e^{a})^{5}\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^{2}}$

نضع: $f(x)=e^{x}-2e^{\frac{x}{2}}$ أحسب $f(2\ln 3)$

أجوبة :

$$A=e^{\ln(b)}-\ln\left(2e^{b}\right)-\ln\left(\frac{e}{2}\right)=b-\ln2-\ln\left(e^{b}\right)-\ln e+\ln2$$

$$A=b-\ln2-b-1+\ln2=-1$$

$$B=\frac{\left(e^{a}\right)^{5}\times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^{2}}=\frac{e^{5a}\times e^{3-a}}{e^{2\left(1+\frac{3}{2}a\right)}}=\frac{e^{5a+3-a}}{e^{2+3a}}$$

$$B=\frac{e^{4a+3}}{e^{2+3a}}=e^{4a+3-2-3a}=e^{a+1}$$

$$f(2\ln3)=e^{2\ln3}-2e^{\frac{2\ln3}{2}}=e^{\ln3^{2}}-2e^{\ln3}=3^{2}-2\times3=3$$

تمرين2: بسط ما يلي: $A=e^{-x}\times e^{2x}$

$,\quad B=\left(e^{2-x}\right)^{2}\times e^{3x-4}\quad C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}$

$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}\right)\ ,\ D=\dfrac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^{x}\right)^{4}}$

أجوبة : $A=e^{-x}\times e^{2x}=e^{-x+2x}=e^{x}$

$$B=\left(e^{2-x}\right)^{2}\times e^{3x-4}=e^{2(2-x)}\times e^{3x-4}=e^{4-2x+3x-4}=e^{x}$$

$$C=\sqrt{e^{2x}}\times e^{-x}=\left(e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}\times e^{-x}=e^{\cancel{2}x\frac{1}{\cancel{2}}}\times e^{-x}=e^{x}\times e^{-x}=e^{x+(-x)}=e^{0}=1$$

$$D=\frac{e^{2x}\times e^{3x}}{\left(e^{x}\right)^{4}}=\frac{e^{2x+3x}}{e^{4x}}=\frac{e^{5x}}{e^{4x}}=e^{5x-4x}=e^{x}$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}\right)$$

$$E=e^{2x}\left(\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}+\left(e^{x}\right)^{2}-2e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}\right)$$

$$E=e^{2x}\left(e^{2x}+e^{-2x}+e^{2x}+e^{-2x}\right)=e^{2x}\left(2e^{2x}+2e^{-2x}\right)$$

$$E=2e^{4x}+2$$

تمرين3: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

$g(x)=\dfrac{3x-1}{\left(e^{x}\right)^{2}-1}$ و $f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^{2}-2x}}$

أجوبة : $f(x)=e^{\frac{3x-1}{x^{2}-2x}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^{2}-2x\neq0\right\}$

$x^{2}-2x=0$ يعني $x(x-2)=0$ يعني $x=0$ أو $x-2=0$

يعني $x=0$ أو $x=2$ ومنه : $D_f=\mathbb{R}-\{0,2\}$

$$g(x)=\frac{3x-1}{\left(e^{x}\right)^{2}-1}$$

$D_g=\left\{x\in\mathbb{R}/\left(e^{x}\right)^{2}-1\neq0\right\}$

$\left(e^{x}\right)^{2}-1=0$ يعني $\left(e^{x}\right)^{2}-1^{2}=0$

يعني $\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)=0$ يعني $e^{x}+1=0$ او $e^{x}-1=0$

يعني $e^{x}=-1$ او $e^{x}=1$

نعلم أن : $(\forall x\in\mathbb{R})\,e^{x}>0$ اذن المعادلة :

$e^{x}=-1$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$

$e^{x}=1$ يعني $x=\ln1$ يعني $x=0$ ومنه : $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

تمرين4: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e$ 2) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}$ 3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0$

أجوبة: 1) $e^{1-x}\times e^{2x}=e\ \Leftrightarrow\ e^{2x+1-x}=e^{1}$

$\Leftrightarrow\ e^{x+1}=e^{1}\ \Leftrightarrow\ x+1=1\ \Leftrightarrow\ x=0$

ومنه : $S=\{0\}$

2) $\dfrac{e^{2-x}}{e^{1+2x}}=e^{x-1}\ \Leftrightarrow\ e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}$

$e^{(2-x)-(1+2x)}=e^{x-1}\ \Leftrightarrow\ (2-x)-(1+2x)=x-1$

$\Leftrightarrow\ 2-x-1-2x=x-1\ \Leftrightarrow\ -4x=-2\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{1}{2}$

ومنه : $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

3) $e^{2x}-5e^{x}+6=0\ \Leftrightarrow\ \left(e^{x}\right)^{2}-5e^{x}+6=0$

نضع : $X=e^{x}$ والمعادلة تصبح : $X^{2}-5X+6=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=25-24=1>0$

بما أن $\Delta\succ0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\dfrac{5+1}{2\times1}$ و $X_2=\dfrac{5-1}{2\times1}$ يعني $X_1=3$ و $X_2=2$

يعني $e^{x_1}=3$ و $e^{x_2}=2$ يعني $x_1=\ln3$ و $x_2=\ln2$

ومنه : $S=\{\ln2,\ln3\}$

تمرين5: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\dfrac{1}{e^{x}}$ 2) $\dfrac{1}{e^{x+1}}\geq e^{1-x^{2}}$

أجوبة: 1) $e^{-3-x}\times e^{1+2x}>\dfrac{1}{e^{x}}\ \Leftrightarrow\ e^{-3-x+1+2x}>e^{-x}$

$\Leftrightarrow\ -3-x+1+2x>-x\ \Leftrightarrow\ 2x>2\ \Leftrightarrow\ x>1$

ومنه : $S=]1,+\infty[$

2) $e^{-1-x}\geq e^{1-x^{2}}\ \Leftrightarrow\ -1-x\geq1-x^{2}\ \Leftrightarrow\ x^{2}-x-2\geq0$

$\Delta=b^{2}-4ac=1+8=9>0$

اذن تقبل جذرين هما:

$x_1=\dfrac{1+3}{2\times1}$ و $x_2=\dfrac{1-3}{2\times1}$ يعني $x_1=2$ و $x_2=-1$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

ومنه : $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$

تمرين6: حل في $\mathbb{R}^{2}$ النظمات التالية:

1) $(S_1)\begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ e^{x}+e^{y}=3\end{cases}$ 2) $(S_2)\begin{cases}e^{x}e^{y}=10\\ \dfrac{e^{x}}{e^{y}}=\dfrac{2}{5}\end{cases}$

أجوبة : 1) $(S_1)\begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ e^{x}+e^{y}=3\end{cases}$

$$\begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ e^{x}+e^{y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2e^{x}+3e^{y}=8\\ -2e^{x}-2e^{y}=-6\end{cases}$$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد :

$2e^x + 3e^y - 2e^x - 2e^y = 8-6$ يعني $e^y = 2$

يعني $y = \ln 2$

وبعويض y بقيمتها في المعادلة 2 نجد : $e^x + e^{\ln 2} = 3$

يعني $e^x + 2 = 3$ يعني $e^x = 1$ يعني $x = \ln 1 = 0$

ومنه : $S = \{(0, \ln 2)\}$

(2 $(S_2)\begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \dfrac{e^x}{e^y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$ يعني $\begin{cases} e^{x+y} = 10 \\ e^{x-y} = \dfrac{2}{5} \end{cases}$

يعني $\begin{cases} x+y = \ln(10) \\ x-y = \ln\left(\dfrac{2}{5}\right) \end{cases}$ يعني $\begin{cases} x+y = \ln(2\times 5) \\ x-y = \ln\left(\dfrac{2}{5}\right) \end{cases}$

يعني $\begin{cases} x+y = \ln 2 + \ln 5 \\ x-y = \ln 2 - \ln 5 \end{cases}$

ونجمع المعادلتين طرف لطرف فنجد : $2x = 2\ln 2$

يعني $x = \ln 2$

وبعويض x بقيمتها في المعادلة 1 نجد :

$\ln 2 + y = \ln 2 + \ln 5$

يعني $y = \ln 5$ ومنه : $S = \{(\ln 2, \ln 5)\}$

II. نهايات اعتيادية

خاصية1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

أمثلة: لنحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^x$ لدينا.

$(\forall x\in\mathbb{R}); (2x-1)e^x = 2(xe^x) - e^x$

و بما أن: $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ فان

$\lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^x = 0$

لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3}{x}$ لدينا. $(\forall x\in\mathbb{R}^*); \dfrac{e^x+3}{x} = \dfrac{e^x}{x} + \dfrac{3}{x}$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x} = 0$ فان:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3}{x} = +\infty$.

خاصية2: لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.و

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

مثال: لنحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3x}{x^3}$ لدينا:

$(\forall x\in\mathbb{R}^*); \dfrac{e^x+3x}{x^3} = \dfrac{e^x}{x^3} + \dfrac{3}{x^2}$

بما أن. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$ فان: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3x}{x^3}$

تمرين7: أحسب النهايات التالية :

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

(1 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x+2}$ (2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}$ (3 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + e^{-x}$ (5 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ (6 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$

(7 $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - e^x$ (8 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{x^2}$ (9 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+3x}$

(10 $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 - e^x$ (11 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3x}{x^3}$

(12 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3}$ (ضع $2x = X$) (13 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x}$ (14

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x}}{x^3+x+1}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

(15 $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x-1)e^x$ (16 $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^5-4x^3)e^x$ (17

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$ (18 $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3-2x)e^{2x}$

تطبيق الخاصية: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$

(19 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{3x}$ (20 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

(21 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{1-x}-1}{x-1}$ (22 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ (23 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x+1}-e}{x}$

(استعمال المشتقة)

أجوبة : (1 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x+1}{e^x+2} = \dfrac{0+1}{0+2} = \dfrac{1}{2}$ لأن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

(2 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x+1 = +\infty$ اذن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = +\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+1 = -\infty$ اذن :

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+1} = 0$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$

(4 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + e^{-x}$ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$ اذن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x + e^{-x} = +\infty$

(5 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}}$ لدينا :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+1}{x^3+5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x^2} = 0$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} = e^0 = 1$

6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} = \dfrac{1-0}{1+0} = 1$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$

7) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x - e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\dfrac{e^x}{x}\right) = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{e^x}{x} = -\infty$

8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x^2} = 0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2} = +\infty$

9) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+3x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{3}{x}} = 1$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+3x} = +\infty$

10) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 - e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(3-\dfrac{e^x}{x^3}\right)$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-\dfrac{e^x}{x^3} = -\infty$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

إذن: $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3 - e^x = -\infty$

11)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+3x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}+\dfrac{3}{x^2} = +\infty$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2} = 0$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}$ (ضع $2x = X$)

نضع $2x = X$ يعني $x = \dfrac{X}{2}$

$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{\left(\frac{X}{2}\right)^3} = \lim\limits_{X\to+\infty} 8\dfrac{e^X}{X^3}$

نعلم أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X^3} = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{X\to+\infty} 8\dfrac{e^X}{X^3} = +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$

13) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}$ نضع $3x = X$ يعني $x = \dfrac{X}{3}$

$X\to+\infty \Leftrightarrow x\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x} = \lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{\frac{X}{3}} = \lim\limits_{X\to+\infty} 3\dfrac{e^X}{X}$

نعلم أن : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X} = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{X\to+\infty} 3\dfrac{e^X}{X} = +\infty$

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x} = +\infty$

14)

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3+x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3}\times\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$

نعلم حسب سؤال سابق أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$ ولدينا

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = 1$

ومنه: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^3+x+1} = +\infty$

15) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^x - e^x$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ إذن :

$\lim\limits_{x\to-\infty}(3x-1)e^x = 0$

16) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} x^5e^x - 4x^3e^x$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$ إذن:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^5-4x^3\right)e^x = 0-0 = 0$

17) $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

نضع $\dfrac{1}{x} = X$ $\quad X\to-\infty \Leftrightarrow x\to0^-$

$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} = 0$

18)

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-2x\right)e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3e^{2x} - 2xe^{2x} = 0-2\times0 = 0$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$

19) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$

نضع $2x = X$ يعني $x = \dfrac{X}{2}$ و $X\to0 \Leftrightarrow x\to0$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{3x}=\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{3\frac{X}{2}}=\lim_{X\to0}\frac{2}{3}\frac{e^X-1}{X}=\frac{2}{3}\times1=\frac{2}{3}$$

لأن : $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(20 $\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ نضع $\frac{1}{x}=X$ اذن : $x=\frac{1}{X}$

$X\to0\Leftrightarrow x\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{X\to0}\frac{1}{X}\left(e^X-1\right)=\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}=1$$

(21 $\lim_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}$

نضع $1-x=X$ يعني $x=1-X$ و $x\to1\Leftrightarrow$ $X\to0$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^{1-x}-1}{x-1}=\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim_{X\to0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$$

لأن : $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(22 $\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

نضع $-x=X$ يعني $x=-X$ و $X\to0\Leftrightarrow x\to0$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{-X}=\lim_{X\to0}-\frac{e^X-1}{X}=-1$$ لأن :

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

(23 $\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}$ (استعمال المشتقة)

نضع : $f(x)=e^{x+1}$ اذن : $f(0)=e^{0+1}=e^1=e$

و $f'(x)=(x+1)'e^{x+1}=1e^{x+1}=e^{x+1}$ اذن: $f'(0)=e$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x+1}-e}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=e$$

III. مشتقة الدالة $x\mapsto e^x$

خاصية: الدالة exp قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا:

$(\forall x\in\mathbb{R})\left(e^x\right)'=e^x$

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فان الدالة:

$f:x\mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

و لدينا: $(\forall x\in I);\ f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

و نكتب اصطلاحا: $(\forall x\in I);\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$

و للبرهان يكفي ملاحظة أن : $f=\exp o u$

مثال: لنحسب مشتقة الدالة. $f:x\mapsto e^{x^2-x}$

لدينا الدالة $u:x\mapsto x^2-x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و منه f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

و لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=\left(x^2-x\right)'e^{x^2-x}$

$(\forall x\in\mathbb{R});\ f'(x)=(2x-1)e^{x^2-x}$

تمرين8: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية: (1 $f(x)=e^{3x}+e^x$

(2 $f(x)=2x-e^{-x}$ (3 $f(x)=x^2e^{-x}$ (4 $f(x)=(2x-1)\left(e^x-1\right)$

(5 $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$ (6 $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$ (7 $f(x)=e^{x\ln x}$

(8 $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$ (9 $f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

أجوبة :(1 $f(x)=e^{3x}+e^x$ اذن: $f'(x)=\left(e^{3x}+e^x\right)'$

$$f'(x)=\left(e^{3x}\right)'+\left(e^x\right)'=(3x)'e^{3x}+e^x=3e^{3x}+e^x$$

(2 $f(x)=2x-e^{-x}$

$$f'(x)=\left(2x-e^{-x}\right)'=(2x)'-\left(e^{-x}\right)'=2-(-x)'e^{-x}=2+e^{-x}$$

(3 $f(x)=x^2e^{-x}$

$$f'(x)=\left(x^2e^{-x}\right)'=\left(x^2\right)'e^{-x}+x^2\left(e^{-x}\right)'=2xe^{-x}+x^2\times(-x)'e^{-x}$$

$$f'(x)=e^{-x}\left(2x-x^2\right)$$

(4 $f(x)=(2x-1)\left(e^x-1\right)$

$$f'(x)=\left((2x-1)\left(e^x-1\right)\right)'=(2x-1)'\left(e^x-1\right)+(2x-1)\left(e^x-1\right)'$$

$$f'(x)=2\left(e^x-1\right)+(2x-1)e^x=2e^x-2+2xe^x-e^x=e^x-2+2xe^x$$

(5 $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$

$$f'(x)=\left((x-1)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=\left((x-1)\right)'e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x)=1e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\left(-\frac{1}{x}\right)'e^{-\frac{1}{x}}=e^{-\frac{1}{x}}+(x-1)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$f'(x)=e^{-\frac{1}{x}}\left(1+(x-1)\frac{1}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2}\right)$$

(6 $f(x)=\sqrt{e^{2x}-e^x}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{e^{2x}-e^x}\right)'=\frac{\left(e^{2x}-e^x\right)'}{2\sqrt{e^{2x}-e^x}}=\frac{2e^{2x}-e^x}{2\sqrt{e^{2x}-e^x}}$$

(7 $f(x)=e^{x\ln x}$

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=(x\ln x)'e^{x\ln x}=\left((x)'\ln x+x(\ln x)'\right)e^{x\ln x}$$

$$f'(x)=\left(1\ln x+x\frac{1}{x}\right)e^{x\ln x}=(\ln x+1)e^{x\ln x}$$

(8 $f(x)=\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}$

$$f'(x)=\left(\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}\right)'=\left(\left(e^x-4\right)\right)'\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x)=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\frac{\left(e^x-1\right)'}{2\sqrt{e^x-1}}=e^x\sqrt{e^x-1}+\left(e^x-4\right)\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x\left(e^x-1\right)+e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{2e^{2x}-2e^x+e^{2x}-4e^x}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{3e^{2x}-6e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$

(9 $f(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$

$$f'(x)=\left(\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'=\left(\frac{2}{(x-1)^2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left(e^{\frac{x+1}{x-1}}\right)'$$

$$f'(x)=\left(2(x-1)^{-2}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x)=-4(x-1)^{-3}\left((x-1)\right)'e^{\frac{x+1}{x-1}}+\frac{2}{(x-1)^2}\times\frac{-2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$f'(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}\left(\frac{-4}{(x-1)^3}-\frac{4}{(x-1)^4}\right)=\frac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

IV. الدوال الأصلية للدالة: $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال الأصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I

هي الدوال المعرفة على I بما يلي: $x\mapsto e^{u(x)}+k$ حيث k عدد حقيقي

مثال: الدالة: $x\mapsto e^{\sin x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\cos xe^{\sin x}$ على $\mathbb{R}$

تمرين9: حدد الدالة أصلية للدالة f على المجال I

1. $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$
2. $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$
3. $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$
4. $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin xe^{\cos x}$
5. $I=]0;+\infty[\ \ f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}$

أجوبة: 1) $I=\mathbb{R};\ f(x)=2e^{3x}-e^{-x}$

$$f(x)=2e^{3x}-e^{-x}=\frac{2}{3}(3x)'e^{3x}+(-x)'e^{-x}$$

إذن: $F(x)=\dfrac{2}{3}e^{3x}+e^{-x}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(2 $I=]0;+\infty[;\ f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$

$$f(x)=\frac{e^{2x}}{\left(e^{2x}-1\right)^2}=\frac{1}{2}\frac{\left(e^{2x}-1\right)'}{\left(e^{2x}-1\right)^2}$$

إذن: $F(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{e^{2x}-1}$ هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(3 $I=\mathbb{R};\ f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3$

$$f(x)=e^x\left(e^x-1\right)^3=\left(e^x-1\right)'\left(e^x-1\right)^3$$

إذن: $F(x)=\dfrac{1}{3+1}\left(e^x-1\right)^{3+1}=\dfrac{1}{4}\left(e^x-1\right)^4$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(4 $I=[0;\pi];\ f(x)=\sin xe^{\cos x}$

$$f(x)=\sin xe^{\cos x}=-(\cos x)'e^{\cos x}$$

إذن: $F(x)=e^{\cos x}$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

(5 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\ \ I=]0;+\infty[$

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}=\frac{\left(e^x-x\right)'}{e^x-x}$$

إذن: $F(x)=\ln\left|e^x-x\right|$

هي دالة أصلية للدالة f على المجال I

تمرين10: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=e^{2x}-2e^x$$

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
2. حدد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

أجوبة: 1) $f(x)=e^{2x}-2e^x$

$$D_f=\mathbb{R}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-2e^x=0$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(e^x-2\right)=+\infty$ **لأن:** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

$$f'(x)=\left(e^{2x}-2e^x\right)'=2e^{2x}-2e^x=2e^x\left(e^x-1\right)$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة e^x-1

$$x>0\Leftrightarrow x>\ln 1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x-1>0$$

إذن: $x>0\Leftrightarrow e^x-1>0$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) $f(x)=e^{2x}-2e^x$

$$f(x)=e^{2x}-2e^x=\frac{1}{2}(2x)'e^{2x}-2\left(e^x\right)'$$

إذن: $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{2x}-2e^x$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

تمرين11: أحسب $f'(x)$ في الحالات الأتية على المجال I

1. $f(x)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}};I=]0;+\infty[$
3. $f(x)=x-\dfrac{e^x-1}{e^x+1};I=\mathbb{R}$

أجوبة: 1) $f(x)=e^{x^2-3x}\ ,\ I=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(e^{x^2-3x}\right)'=\left(x^2-3x\right)'e^{x^2-3x}=(2x-3)e^{x^2-3x}$$

$$f(x)=(x-1)e^{\frac{1}{x}};I=]0;+\infty[\ (2$$

$$f'(x)=\left((x-1)e^{\frac{1}{x}}\right)'=(x-1)'e^{\frac{1}{x}}+(x-1)\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'$$

$$f'(x)=1e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}(x-1)e^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x^2}(x-1)\right)=e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x)=x-\frac{e^x-1}{e^x+1};I=\mathbb{R}\ (3$$

$$f'(x)=\left(x-\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)'=1-\frac{(e^x-1)'(e^x+1)-(e^x-1)(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=1-\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=1-\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

V. الدالة الأسية للأساس a ($a\succ 0$ و $a\neq 1$)

1)تعريف: ليكن a عددا حقيقيا موجبا قطعا و مخالفا للعدد 1
الدالة الأسية للأساس a هي الدالة التي تربط كل عدد حقيقي x بالعدد الحقيقي $e^{x\ln a}$, و الذي يكتب a^x
و نرمز لها بالرمز $\exp_a$, و لدينا:
$$(\forall x\in\mathbb{R})\exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$$

2)نتائج:
❖ لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\ln(a^x)=x\ln a$
❖ $(\forall x\in\mathbb{R})$ و$(\forall y\in]0,+\infty[)$ $a^x=y$ يكافئ $x=\log_a y$
❖ لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $a^x=a^y$ يكافئ $x=y$

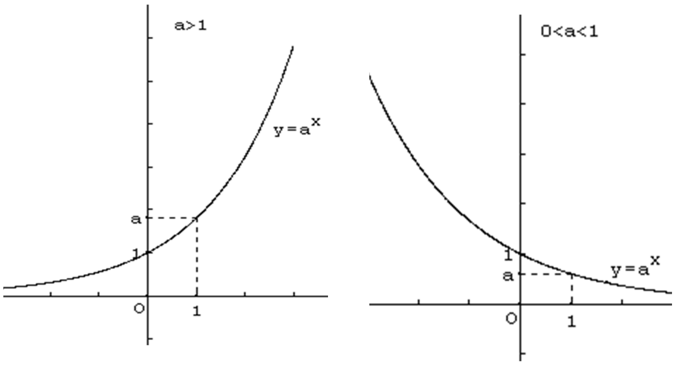
3)خاصيات: لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا:
$$a^xa^y=a^{x+y};\frac{1}{a^x}=a^{-x};\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y};(a^x)^y=a^{xy}$$

ملحوظة: هذه الخاصيات هي تمديد لخاصيات القوى الجذرية و يمكن البرهان عليها باستعمال المتساوية $a=e^{x\ln a}$

VI. الدالة المشتقة للدالة $x\mapsto a^x$

1)خاصية: الدالة $f:x\mapsto a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا
$$(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=(\ln a)a^x$$
البرهان: لدينا: $(\forall x\in\mathbb{R});f(x)=a^x=e^{x\ln a}$
نضع: $u(x)=x\ln a$ و منه: $f(x)=e^{u(x)}$
لدينا u دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (دالة خطية) إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
و لدينا:
$$(\forall x\in\mathbb{R});f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=\ln a e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$$

2)نتيجة:
❖ إذا كان $0\prec a\prec 1$ فإن:
$$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2);(a^x\prec a^y\Leftrightarrow x\succ y)$$
❖ إذا كان $a\succ 1$ فإن:
$$(\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2);(a^x\prec a^y\Leftrightarrow x\prec y)$$



تمرين12: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات و المتراجحات الآتية:
$2^{x+1}=8^x$ (1 $\quad 3^x=12$ (2 $\quad 5\times2^x+2^{x+1}-336=0$ (3
$2^{x-1}>4^x$ (4 $\quad (0,5)^{2x}\geq(0,5)^{x+1}$ (5

أجوبة :1) $2^{x+1}=8^x$ يعني $2^{x+1}=(2^3)^x$ يعني $2^{x+1}=2^{3x}$
يعني $x+1=3x$ يعني $1=2x$ يعني $x=\frac{1}{2}$ ومنه : $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$
2) $3^x=12$ يعني $x=\log_3 12$ ومنه : $S=\{\log_3 12\}$
3) $2^x-3\times2^{x+1}-16=0$ يعني $2^x-3\times2^1\times2^x-16=0$
نضع : $X=2^x$ و المعادلة تصبح : $X^2-6X-16=0$
$$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2+4\times1\times16=100>0$$
بما أن $\Delta\succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:
$X_1=\frac{6+10}{2\times1}=8$ و $X_2=\frac{6-10}{2\times1}=-2$ يعني $X_1=8$ و $X_2=-2$
$2^x=8$ و $2^x=-2$ يعني $x_1=\log_2 8$ و $2^x=-2$ ليس لها حل
$x_1=\log_2 8$ يعني $x_1=\log_2 2^3=3\log_2 2=3\times1=3$
ومنه : $S=\{3\}$
4) $2^{x-1}>4^x$ يعني $2^{x-1}>(2^2)^x$ يعني $2^{x-1}>2^{2x}$
يعني $x-1>2x$ يعني $-1>x$
ومنه : $S=]-\infty,-1[$
5) $(0,5)^{2x}>(0,5)^{x+1}$ يعني $2x<x+1$ لأن : $0<0,5<1$
يعني $x<1$ ومنه $S=]-\infty,1[$

3)حالة خاصة الدالة الأسية للأساس 10

❖ الدالة: $x\mapsto10^x$ تسمى الدالة الأسية للأساس 10 و نرمز لها بالرمز $\exp_{10}$
و اصطلاحا بالرمز 10^x و لدينا $10^x=e^{x\ln10}$
❖ $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall x\in]0;+\infty[);10^x=y\Leftrightarrow x=\log y$
حيث $\log$ هي دالة اللوغاريتم العشري

مثال : حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية: $100^x+40=14\times10^x$
الجواب : $100^x+40=14\times10^x$ يعني
$(10^2)^x-14\times10^x+40=0$
يعني $10^{2x}-14\times10^x+40=0$ يعني
$(10^x)^2-14\times10^x+40=0$

نضع : $X = 10^x$ و المعادلة تصبح : $X^2-14X+40=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(-14)^2-4\times40=36>0$$

بما أن $\Delta \succ 0$ فان هذه المعادلة تقبل حلين هما:

$X_1=\frac{14+6}{2\times1}$ و $X_2=\frac{14-6}{2\times1}$ يعني $X_1=10$ و $X_2=4$

يعني $10^{x_1}=10$ و $10^{x_2}=4$ يعني $x_1=1$ و $x_2=\log_{10}4$

ومنه : $S=\{1,\log_{10}4\}$

VII. دراسة دوال تحتوى على الدالة الأسية النبيرية و اللوغاريتم النبيرى

مثال1: لتكن f الدالة العددية المعرفة ما يلي:

$$f(x)=(x-1)e^x$$

1. حدد D_f أحسب النهايات عند محدات D_f
2. أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
4. أدرس تقعر (C)
5. أنشئ المنحنى (C)

أجوبة 1) $D_f=\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)e^x=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim_{x\to-\infty} xe^x-e^x=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0^+$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

مبيانيا : $y=0$ مقارب ل (C) بجوار $-\infty$

(2 $f'(x)=\left((x-1)e^x\right)'=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'$

$$f'(x)=1e^x+(x-1)e^x=e^x+xe^x-e^x=xe^x$$

اشارة $f'(x)$ هي اشارة x

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

(3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-1)e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$ **و** $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x}e^x=1\times(+\infty)=+\infty$

اذن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

(4 دراسة تقعر (C)

نحسب : $f''(x)=(xe^x)'=(x)'e^x+x(e^x)'=e^x(1+x)$

اشارة $f''(x)$ هي اشارة $x+1$

$x+1=0$ يعني $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

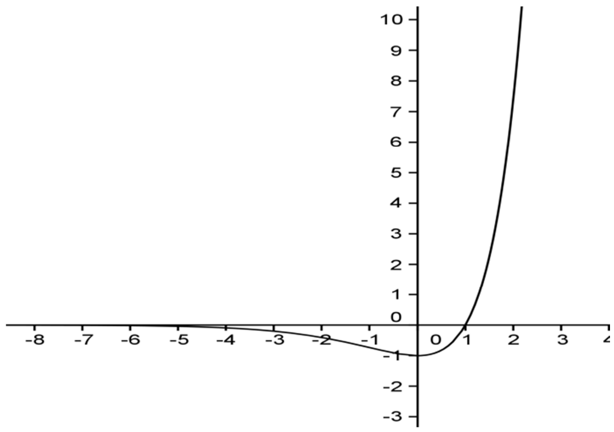
ومنه

- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب الموجبة على المجال: $[-1;+\infty[$
- تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على المجال: $]-\infty,-1]$

يمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

النقطة : $A(-1,-2e^{-1})$ نقطة انعطاف ل (C_f)

(5



مثال2: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$

لتكن f الدالة المعرفة كالتالي: $f(x)=x-1+\frac{3}{e^x+1}$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f
2. حدد تغيرات f و أعط جدول التغيرات
3. تحقق من أن : $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)=x+2-\frac{3e^x}{e^x+1}$
4. حدد معادلة المقاربين المائلين لمنحنى f (مع تحديد الوضع النسبي)

أجوبة (1: $D_f=\{x\in\mathbb{R}/e^x+1\neq0\}$

$e^x+1=0$ يعني $e^x=-1$ ليس لها حل لأن : $\forall x\in\mathbb{R}\ e^x>0$

ومنه : $D_f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{e^x+1}=0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-1+\frac{3}{e^x+1}=-\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty} x-1=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3}{e^x+1}=3$

(2 $f'(x)=\left(x-1+\frac{3}{e^x+1}\right)''=1-3\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2}=1-3\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)^2-3e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x)^2+2e^x+1-3e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{(e^x)^2-e^x+1}{(e^x+1)^2}$$

اشارة : $f'(x)$ هي اشارة $\left(e^x\right)^2 - e^x + 1$

نضع : $e^x = X$ والمعادلة تصبح : $X^2 - X + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 < 0$

اذن هذه المعادلة ليس لها حل ومنه اشارتها هي اشارة 1 ومنه :

$$\left(e^x\right)^2 - e^x + 1 > 0$$

ومنه : $f'(x) > 0$ جدول التغيرات :

x	$-\infty \qquad\qquad +\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) نتحقق من أن : $(\forall x \in \mathbb{R});\ f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x+1}$

$$f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x+1} = x + 2 - 3 + \frac{3}{e^x+1}$$

$$f(x) = x + 2 + \frac{-3\left(e^x+1\right)+3}{e^x+1} = x + 2 + \frac{-3e^x - 3 + 3}{e^x+1}$$

$$f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x+1}$$

4) نعلم أن : $f(x) = x - 1 + \dfrac{3}{e^x+1}$ يعني $f(x) - (x-1) = \dfrac{3}{e^x+1}$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{e^x+1} = 0$ ومنه :

$(\Delta)\ y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل ل $\left(C_f\right)$ بجوار $+\infty$

لدينا : $f(x) - (x-1) = \dfrac{3}{e^x+1} > 0$ اذن $\left(C_f\right)$ فوق $(\Delta)\ y = x - 1$

نعلم أن : $f(x) = x + 2 - \dfrac{3e^x}{e^x+1}$ يعني

$$f(x) - (x+2) = -\frac{3e^x}{e^x+1}$$

اذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+2) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{3e^x}{e^x+1} = 0$ ومنه :

$(D)\ y = x + 2$ مستقيم مقارب مائل ل $\left(C_f\right)$ بجوار $-\infty$

لدينا : $f(x) - (x+2) = -\dfrac{3e^x}{e^x+1} < 0$ اذن $\left(C_f\right)$ تحت $(D)\ y = x + 2$

تمرين13: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x) = \left(e^x - 4\right)\sqrt{e^x - 1}$$

1. أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \dfrac{e^x-1}{x}$
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
4. بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \dfrac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$
5. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
6. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
7. أحسب $f(2\ln 2)$ ثم أنشئ المنحنى (C)

أجوبة (1: $f(x) = \left(e^x - 4\right)\sqrt{e^x - 1}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^x - 4\right)\sqrt{e^x - 1} = +\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - 4 = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{e^x - 1} = +\infty$

(2 $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}}{x} = \dfrac{\left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2}{x\sqrt{e^x-1}}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\left(e^x-4\right)\left(e^x-1\right)}{x\sqrt{e^x-1}} = \frac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \frac{e^x-1}{x}$$

(3 $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-4}{\sqrt{e^x-1}} \cdot \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-1}{x}$

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ و $\lim\limits_{x\to0^+} e^x - 4 = -3$ و $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{e^x-1} = 0^+$

.

اذن : $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$ ومنه f غير قابلة للاشتقاق على اليمين عند $x_0 = 0$

مبيانيا منحنى الدالة f يقبل نصف مماس يوازي محور الأراتيب في النقطة $A(0; f(0))$: وموجه نحو الأسفل

4) بين أن لكل x من $\mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \dfrac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$

$$f'(x) = \left(\left(e^x-4\right)\sqrt{e^x-1}\right)' = \left(e^x-4\right)'\sqrt{e^x-1} + \left(e^x-4\right)\left(\sqrt{e^x-1}\right)'$$

$$f'(x) = e^x\sqrt{e^x-1} + \left(e^x-4\right)\frac{\left(e^x-1\right)'}{2\sqrt{e^x-1}} = e^x\sqrt{e^x-1} + \frac{e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x\left(\sqrt{e^x-1}\right)^2 + e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{2e^x\left(e^x-1\right) + e^x\left(e^x-4\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{2e^{2x} - 2e^x + e^{2x} - 4e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{3e^{2x} - 6e^x}{2\sqrt{e^x-1}} = \frac{3e^x\left(e^x-2\right)}{2\sqrt{e^x-1}}$$

5) اشارة $f'(x)$ هي اشارة $e^x - 2$ لأن : $\dfrac{3e^x}{2\sqrt{e^x-1}} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$

$e^x - 2 > 0$ يعني $e^x > 2$ يعني $x > \ln 2$

$$f(\ln 2) = \left(e^{\ln 2} - 4\right)\sqrt{e^{\ln 2} - 1} = (2-4)\sqrt{2-1} = -2$$

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$0 \searrow$	-2	$\nearrow +\infty$

(6 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x}{x}-\frac{4}{x}\right)\sqrt{e^x-1}$

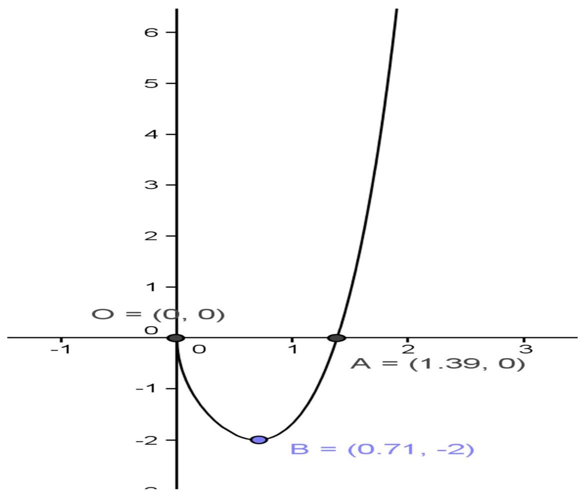
نعلم أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ و

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{e^x-1}=+\infty$

اذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ومنه (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

(7

$$f(\ln 2)=\left(e^{2\ln 2}-4\right)\sqrt{e^{2\ln 2}-1}=\left(e^{\ln 4}-4\right)\sqrt{e^{\ln 4}-1}=(4-4)\sqrt{4-1}=0$$



تمرين14: لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$$f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محدات D_f
2. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
3. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
4. حدد $f^{-1}(x)$ $\forall x\in J$

أجوبة : $f(x)=\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/1-e^{2x}>0\right\}$

$1-e^{2x}>0$ يعني $1>e^{2x}$ يعني $e^0>e^{2x}$

يعني $0>2x$ يعني $x<0$

ومنه: $D_f=\left]-\infty,0\right[$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\frac{0}{\sqrt{1-0}}=0$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\lim_{x\to0^-}\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}}=+\infty$$

لأن : $\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt{\left(\frac{1}{e^{2x}}-1\right)}=0^+$

(2 $f'(x)=\left(\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\right)'=\frac{\left(e^x\right)'\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)'}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{e^x\sqrt{1-e^{2x}}-e^x\frac{\left(1-e^{2x}\right)'}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{\left(\sqrt{1-e^{2x}}\right)^2}=\frac{\frac{2e^x\left(1-e^{2x}\right)+2e^xe^{2x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}}}{1-e^{2x}}$$

$$f'(x)=\frac{2e^x-2e^{3x}+2e^{3x}}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}=\frac{2e^x}{2\sqrt{1-e^{2x}}\left(1-e^{2x}\right)}>0$$

$\forall x\in\left]-\infty,0\right[$

x	$-\infty$ $\quad$ 0
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 $\nearrow$ $+\infty$

(3 f تزايدية قطعا على المجال $I=\left]-\infty,0\right[$ ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J=f(I)=f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$

(4 $\begin{cases}y=f^{-1}(x)\\x\in J\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(y)=x\\y\in I\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}=x\\y\in\left]-\infty,0\right[\end{cases}$ يعني $\left(\frac{e^y}{\sqrt{1-e^{2y}}}\right)^2=x^2$ يعني $\frac{e^{2y}}{1-e^{2y}}=x^2$

$e^{2y}=x^2\left(1-e^{2y}\right)$ يعني $e^{2y}=x^2-x^2e^{2y}$

يعني $e^{2y}+x^2e^{2y}=x^2$

يعني $e^{2y}\left(1+x^2\right)=x^2$ يعني $e^{2y}=\frac{x^2}{1+x^2}$

يعني $2y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$ يعني $y=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)$

يعني $y=\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ $y=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$

ومنه : $f^{-1}(x)=\ln\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$

تمرين15: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

. $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=2cm$.

(1 أ . بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$. ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

ب . بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(2 أ . بين أن $f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$; $\forall x\in\mathbb{R}$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i}\ \vec{j})$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

الأجوبة : $f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)$

1) أ .

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

التأويل الهندسي: $y=0$ مقارب ل (C) بجوار $+\infty$

ب . $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=-\infty$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$

2) أ. نبين أن $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f(x)=x+1-\ln\left(1+e^x\right)$.

$$f(x)=1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=1-\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)=1-\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x}\right)$$

$$f(x)=1-\ln\left(e^x+1\right)+\ln\left(e^x\right)=1-\ln\left(e^x+1\right)+x$$

ومنه : $f(x)=x+1-\ln\left(e^x+1\right)$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

ب . وجدنا أن : $f(x)=x+1-\ln\left(e^x+1\right)$ اذن:

$f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^x+1\right)$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(x+1)=\lim_{x\to-\infty}-\ln\left(e^x+1\right)=0$

لأن : $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$ وبالتالي :

لمستقيم (D) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . دراسة الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .؟؟؟

ندرس اشارة : $f(x)-(x+1)=-\ln\left(e^x+1\right)$

نعلم أن : $e^x>0$ $\quad\forall x\in\mathbb{R}$

اذن : $e^x+1>1$ اذن : $\ln\left(e^x+1\right)>\ln 1$ اذن :

$\ln\left(e^x+1\right)>0$

اذن : $-\ln\left(e^x+1\right)<0$ وبالتالي : اذن (C_f) تحت $y=x+1$ (D)

3)أ. نبين أن $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{1+e^x}$ ؟؟؟؟

$$f'(x)=\left(x+1-\ln\left(1+e^x\right)\right)'=1-\frac{\left(1+e^x\right)'}{1+e^x}=1-\frac{e^x}{1+e^x}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f'(x)=\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}=\frac{1}{1+e^x}>0$$

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow 1$

ج . دراسة تقعر المنحنى (C) .

$$f''(x)=\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'=-\frac{\left(1+e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)^2}=-\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}<0$$

$\forall x\in\mathbb{R},$

تقعر (C_f) موجه نحو محور الأراتيب السالبة على $\mathbb{R},$

ويمكن تلخيص النتائج في جدول التقعر

د . نبين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 ؟؟؟

نحل المعادلة : $f(x)=0$ يعني $1-\ln\left(1+e^{-x}\right)=0$

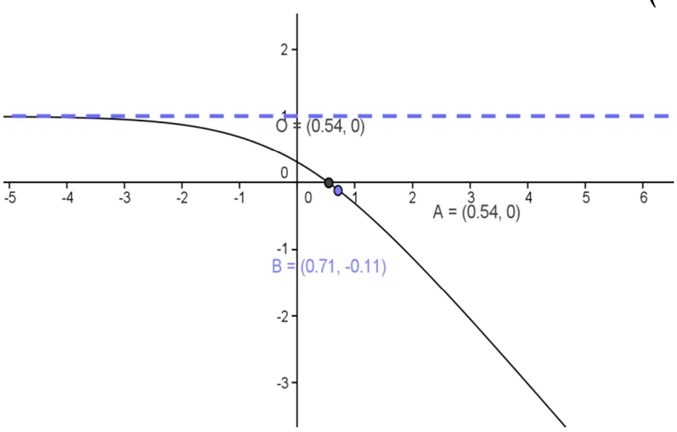
يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=1$ يعني $\ln\left(1+e^{-x}\right)=\ln e$

يعني $1+e^{-x}=e$ يعني $e^{-x}=e-1$ يعني $-x=\ln(e-1)$

يعني $x=-\ln(e-1)$ ومنه النقطة أفصولها هو :

$x_0=-\ln(e-1)$

(4



5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

f تزايدية قطعا على المجال $\mathbb{R}$ ومتصلة

وبالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1}

معرفة على مجال: $J = f(I) = f(\mathbb{R}) =]-\infty;1[$

ب) $\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$

$\begin{cases} 1 - \ln\left(1 + e^{-y}\right) = x \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$ يعني $1 - x = \ln\left(1 + e^{-y}\right)$

يعني $1 + e^{-y} = e^{1-x}$

$e^{-y} = e^{1-x} - 1$ يعني $-y = \ln\left(e^{1-x} - 1\right)$

يعني $y = -\ln\left(e^{1-x} - 1\right)$

ومنه : $f^{-1}(x) = -\ln\left(e^{1-x} - 1\right) \quad \forall x \in]-\infty;1[$

تمرين16BIS:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$f(x) = 3 - \ln\left(1 + e^{-x}\right)$.

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$.

1) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ما هو التأويل الهندسي للنتائج المحصل عنها ؟

2) أ . بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f(x) = x + 3 - \ln\left(1 + e^{x}\right)$.

ب . استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج . حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D) .

3) أ . بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \; ; \; f'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$.

ب . ضع جدول تغيرات الدالة f .

ج . ادرس تقعر المنحنى (C) .

د . بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $\left(O; \vec{i}\; \vec{j}\right)$.

5) أ . بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب . أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J .